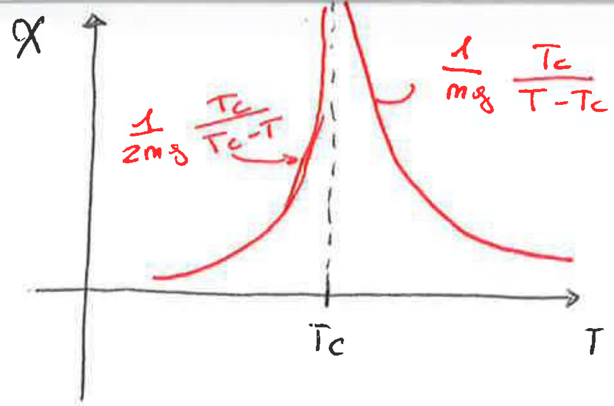


8] ~~$\theta_n + \frac{\theta_n^3}{6} = \theta_n + \frac{h}{mg}$~~

$$\sin\theta = \theta - \frac{h}{mg} \rightarrow \theta_n - \frac{\theta_n^3}{6} = \theta_R - \frac{h}{mg}$$

D'où $\theta_n^3 = \frac{6h}{mg} \rightarrow \boxed{\theta_R = \left(\frac{6h}{mg}\right)^{1/3}}$ $\underline{\underline{\delta = 3}}$

Méca solide

Préliminaire : c'est juste du cours !

Mvt d'un solide dans le vide

1] PFD dans $\mathcal{R}$ galiléen $\left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{0}$ solide isolé

2] $\left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega} \wedge \vec{L}_{/\mathcal{R}'} = \vec{0}$ avec $\vec{L}_{/\mathcal{R}'} = \begin{pmatrix} I_x' & & 0 \\ & I_y' & \\ 0 & & I_z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$

vecteur rotation instantané du solide et rotation de $\mathcal{R}'$ / à $\mathcal{R}$.

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} I_x'\omega_x' \\ I_y'\omega_y' \\ I_z'\omega_z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_x' \\ \omega_y' \\ \omega_z' \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} I_x'\omega_x' \\ I_y'\omega_y' \\ I_z'\omega_z' \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\boxed{\begin{cases} I_x\dot{\omega}_x' + (I_z' - I_y')\,\omega_y'\omega_z' = 0 \\ I_y\dot{\omega}_y' + (I_x' - I_z')\,\omega_x'\omega_z' = 0 \\ I_z\dot{\omega}_z' + (I_y - I_x')\,\omega_y'\omega_x' = 0 \end{cases}}$$

3] $\begin{cases} I_{x'} = I_{y'} = I \\ I_{z'} = I' \end{cases}$

Donc $I_{z'}\dot{\omega}_{z'} + (I_{y'} - I_{x'})\,\omega_{z'}\,\omega_{y'} = 0$

$\rightarrow \quad \dot{\omega}_{z'} = 0 \Rightarrow \boxed{\omega_{z'} = cst}$

4] $\begin{cases} \dot{\omega}_x + \dfrac{I'-I}{I}\,\omega_{z'}\,\omega_{y'} = 0 \\ \dot{\omega}_{y'} + \dfrac{I-I'}{I}\,\omega_{z'}\,\omega_{x'} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\omega}_x + \left(\dfrac{I'-I}{I}\,\omega_z\right)^2 \omega_x = 0 \\ \ddot{\omega}_y + \left(\dfrac{I'-I}{I}\,\omega_z\right)^2 \omega_y = 0 \end{cases}$

$\omega_x = A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)$

$\omega_y = A'\cos(\Omega t) + B'\sin(\Omega t)$

On prend comme condition initiale $\omega_x(0) = \omega_0$ $\quad \omega_y(0) = 0$

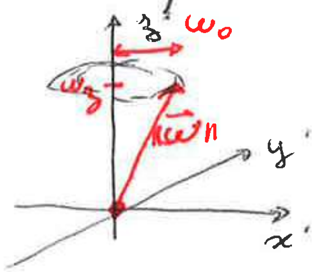
$\rightarrow \begin{cases} \omega_x = \omega_0\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t) \\ \omega_y = B'\sin(\Omega t) \end{cases}$

$\dot{\omega}_x + \dfrac{I'-I}{I}\,\omega_{z'}\,\omega_{y'} = 0 \Rightarrow B' = \omega_0$

et $\|\vec{\omega}\|^2 = cst \Rightarrow B = 0$

$\begin{cases} \omega_x = \omega_0\cos(\Omega t) \\ \omega_y = \omega_0\sin(\Omega t) \end{cases}$

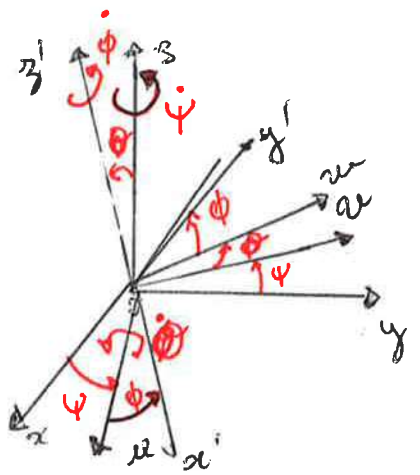
$\omega_x^2 + \omega_z^2 = \omega_0^2$ $\quad \rightarrow$



$\vec{\omega}$ précesse à la pulsation $\vec{\Omega}$.

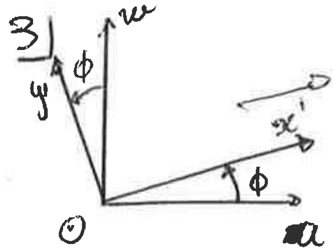
Mvt d'une toupie déséquilibrée

1]

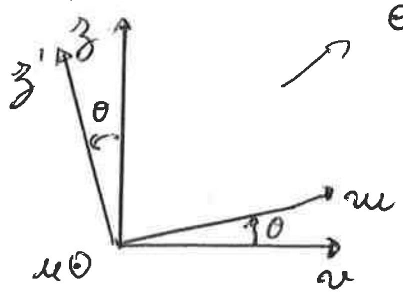


2] $\vec{\Omega} = \dot{\psi}\,\vec{e}_z + \dot{\theta}\,\vec{e}_u + \dot{\phi}\,\vec{e}_{z'}$

3]



$\begin{cases} \vec{e}_u = \cos\phi\,\vec{e}_{x'} - \sin\phi\,\vec{e}_{y'} \\ \vec{e}_w = \cos\phi\,\vec{e}_{y'} + \sin\phi\,\vec{e}_{x'} \end{cases}$



$\vec{e}_z = \cos\theta\,\vec{e}_{z'} + \sin\theta\,\vec{e}_w$

D'où $\vec{e_z} = \cos\theta\,\vec{e_{z'}} + \sin\theta\cos\phi\,\vec{e_{y'}} + \sin\theta\sin\phi\,\vec{e_{x'}}$

et $\vec{\Omega} = \dot\psi\,(\cos\theta\,\vec{e_{z'}} + \sin\theta\cos\phi\,\vec{e_{y'}} + \sin\theta\sin\phi\,\vec{e_{x'}}) + \dot\theta\,(\cos\phi\,\vec{e_{x'}} - \sin\phi\,\vec{e_{y'}}) + \dot\phi\,\vec{e_{z'}}$

$$\boxed{\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \dot\psi\sin\phi\sin\theta + \dot\theta\cos\phi \\ \dot\psi\cos\phi\sin\theta - \dot\theta\sin\phi \\ \dot\phi + \dot\psi\cos\theta \end{pmatrix}}$$

4) Répartition de masse symétrique selon Oz' $\longrightarrow$ $\begin{pmatrix} I & & 0 \\ & I & \\ 0 & & I_{z'} \end{pmatrix}$

Dans R' et dans R_i l'axe Oz' est aligné avec cet axe de symétrie.

5) $$\vec{\Omega}_{R_i/R} = \vec{\Omega}_{R'/R}\Big|_{\phi=0} = \begin{pmatrix} \dot\theta \\ \dot\psi\sin\theta \\ \dot\psi\cos\theta \end{pmatrix}_{R_i}$$

$$\vec{\omega} = \vec{\Omega}_{R_i/R} + \dot\phi\,\vec{e_{z'}} = \begin{pmatrix} \dot\theta \\ \dot\psi\sin\theta \\ \dot\psi\cos\theta + \dot\phi \end{pmatrix}_{R_i}$$

6) $$\left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right|_{R_i} + \vec{\Omega}_{R_i/R}\wedge\vec{L} = \ell m g\cdot(\vec{u_{z'}}\wedge\vec{u_z}) = \ell m g\sin\theta\,\vec{u_{x'}}$$

avec $\vec{L} = \underline{\underline{I}}\,\vec{\omega} = \begin{pmatrix} I_x\dot\theta \\ I_y\dot\psi\sin\theta \\ I_{z'}\dot\psi\cos\theta + I_{z'}\dot\phi \end{pmatrix}$ avec $I_x = I_y = 0$.

$$\vec{\Omega}_{R_i/R}\wedge\underline{\underline{I}}\,\vec{\omega} = \begin{pmatrix} I_{z'}\dot\psi^2\sin\theta\cos\theta + I_{z'}\dot\psi\dot\phi\sin\theta - I\dot\psi^2\sin\theta\cos\theta \\ -I_{z'}\dot\psi\dot\theta\cos\theta - I_z\dot\theta\dot\phi + I\dot\theta\dot\psi\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \begin{pmatrix} I\ddot\theta \\ I\ddot\psi\sin\theta + I\dot\psi\dot\theta\cos\theta \\ I_z\ddot\psi\cos\theta - I_z\dot\psi\dot\theta\sin\theta + I_{z'}\ddot\phi \end{pmatrix}$$

D'où

$$\begin{cases} I\ddot\theta + (I_{z'} - I)\dot\psi^2\sin\theta\cos\theta + I_{z'}\dot\psi\dot\phi\sin\theta = \ell m g\sin\theta \\ I\ddot\psi\sin\theta + (2I - I_{z'})\dot\psi\dot\theta\cos\theta - I_z\dot\theta\dot\phi = 0 \\ \ddot\psi\cos\theta - \dot\psi\dot\theta\sin\theta + \ddot\phi = 0 \end{cases}$$

7] si $\dot\phi \gg \dot\psi ; \dot\theta$ on se retrouve avec le système d'équation :

$$\begin{cases} I_3' \dot\psi \dot\phi \sin\theta = \ell m g \sin\theta & (1) \\ I_3 \dot\theta \dot\phi = 0 & (2) \\ \ddot\phi = 0 & (3) \end{cases}$$

D'où $\underline{\dot\phi = cst}$ (3) ; de (2) on déduit $\dot\theta = 0 \Rightarrow \underline{\theta = cst'}$

et si on suppose que $\theta \neq 0$ initialement, on déduit de (1) :

$$\boxed{\dot\psi = \frac{\ell m g}{I_3' \dot\phi}}$$ vitesse de précession de la toupie.

8] Plus simple : $\vec{L} \simeq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_3 \dot\phi \end{pmatrix}$ $\qquad \vec\Gamma(\vec P) = \ell \vec{e}_{z'} \wedge mg(-\vec{e}_z)$

$\vec L = I_3 \dot\phi \vec{e}_{z'} \rightarrow \vec\Gamma(\vec P) = \ell \dfrac{\vec L}{I_3 \dot\phi} \wedge mg(-\vec{e}_z)$

$$\vec\Gamma = \frac{\ell m g}{I_3 \dot\phi} \vec{e}_z \wedge \vec L$$

Donc thm moment cinétique : $\left.\dfrac{d\vec L}{dt}\right|_R = \vec\Gamma(\vec P) = \underbrace{\dfrac{\ell m g}{I_3 \dot\phi}}_{\gamma} \vec{e}_z \wedge \vec L$

9] $\left.\dfrac{d\vec L}{dt}\right|_R \cdot \vec L = 0 = \dfrac{d\|\vec L\|^2}{dt}$

$\left.\dfrac{d\vec L}{dt}\right|_R \cdot \vec{e}_z = 0 = \dfrac{d(L_z)}{dt}$

Note : L'énoncé a écrit "R_i", mais il aurait fallu écrire "Référentiel R_t tournant quelconque".

10] $\left.\dfrac{d\vec L}{dt}\right|_{R_i} + \vec\Omega_{R/R_i} \wedge \vec L = \gamma \vec{e}_z \wedge \vec L$ $\qquad$ Soit R_i référentiel tournant à la pulsation $\vec\Omega_{R/R_i}$ par rapport à R.

si $\vec\Omega_{R/R_i} = \gamma \vec{e}_z$

$\left.\dfrac{d\vec L}{dt}\right|_{R_i} = \vec 0 \rightarrow$ se ramène à un pb sans pesanteur.

Ici le raisonnement est le même qu'à l'ex sur le thm de Larmor
L'ajout de la pesanteur au pb ne fait que rajouter une rotation
de vecteur $\vec\Omega = \gamma \vec{e}_z \rightarrow$ une précession d'axe Oz donc. Comme prévu.

11 : **N.B** : Un malheureux lapsus lors de la rédaction de l'énoncé a fait écrire le mot "cylindrique" là où je pensais en fait à une toupie "cônique". La longueur l au centre de gravité est donc devenue triviale et le moment d'inertie simple à calculer. Ce qui est grd m dommage.

$$I_z = \iiint \rho(x^2+y^2)\,dV \quad \left\{ \rho \text{ constante, } dV = r\,dr\,d\theta\,dz \rightarrow \text{intégration selon } z \text{ et } \theta \text{ triviale } (=2\pi h) \right.$$

$$x^2+y^2=r^2$$

$$= 2\pi h \rho \int_0^R r^3\,dr$$

$$= \pi \frac{h\rho R^4}{2} \quad \text{or} \quad M = \pi R^2 h \rho$$

$$I_z = \frac{1}{2} M R^2 \text{ et } l = \frac{h}{2} \Rightarrow \dot{\psi} = \frac{lmg}{I_z \dot{\phi}} = \frac{hg}{R^2 \dot{\phi}}$$

Donc $T = \dfrac{2\pi}{\dot{\psi}} = 2\pi \dfrac{R^2 \dot{\phi}}{hg}$; on a $\dot{\phi} = 20\,\text{tr.s}^{-1} = 125{,}66\ \text{rad.s}^{-1}$

(Ne pas oublier de faire cette conversion !)

$$\boxed{T = 2\,s}$$

12| Exemple classique mais joli : on peut calculer que, du fait de la non-sphéricité de la terre, le moment des forces de marée (exercées principalement par la lune et le soleil) sur la terre est non nul ⇒ en considérant de plus la rotation de la terre, nous avons là un modèle de toupie déséquilibrée

↳ on voit apparaître une très lente précession de l'axe de rotation de la terre par rapport à l'axe perpendiculaire au plan de l'écliptique passant par le centre de la terre.

La période est d'environ 25 760 années.