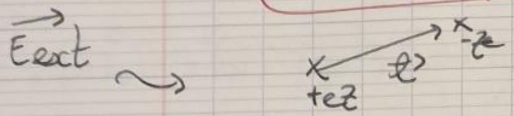
Calcul indice optique dans le cadre du modèle de l'électron élastiquement lié



Convention : $\vec{E} = E_0 e^{-i\omega t + i\vec{k}\cdot\vec{r}}$

Système : $\left\{ \text{nuage électronique, masse } m = Zm_e \text{, charge } q = -Ze \right\}$

BAM : . Force rappel $\vec{f_r} = -Zm\omega_0^2\vec{\ell}$

. Frottements $\vec{f_f} = -\frac{Zm}{\tau}\frac{d\vec{\ell}}{dt}$

. Champ ext avec $a \ll \lambda$: $\vec{f_e} = -Ze\vec{E_0}(\omega)e^{i\omega t}$

PFD :

$$Zm\frac{d^2\vec{\ell}}{dt^2} = -\frac{Zm}{\tau}\frac{d\vec{\ell}}{dt} - Ze\vec{E_0}e^{-i\omega t} - Zm\omega_0^2\vec{\ell}$$

$$\vec{p} = -Ze\vec{\ell} \rightarrow \vec{\ell} = \frac{-\vec{p}}{Ze}$$

D'où avec le PFD :

$$-\frac{m}{e}\frac{d^2\vec{p}}{dt^2} = \frac{m}{e\tau}\frac{d\vec{p}}{dt} - Ze\vec{E_0}(\omega)e^{-i\omega t} + \frac{m\omega_0^2\vec{\ell}}{e}$$

donc :

$$\boxed{\frac{d^2\vec{p}}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{d\vec{p}}{dt} + \omega_0^2\vec{p} = \frac{Ze^2}{m}\vec{E_0}(\omega)e^{-i\omega t}}$$

RSF : $\underline{\vec{p}} = \underline{\vec{p}}(\omega)\, e^{-i\omega t}$

avec le PFD : changement par rapport au CR

$$-\omega^2 \underline{\vec{p}}(\omega) - \frac{i\omega}{\tau}\underline{\vec{p}}(\omega) + \omega_0^2 \underline{\vec{p}}(\omega) = \vec{E}_0(\omega) \times \frac{Ze^2}{m}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{\vec{p}}(\omega) = \frac{Ze^2}{m}\,\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{i\omega}{\tau}}\,\vec{E}_0(\omega)}$$

$\underline{\vec{p}}(\omega) = \varepsilon_0 \underline{\alpha}(\omega)\vec{E}_0(\omega)$, avec $\omega_0^2 = \frac{Ze^2}{3\varepsilon_0 V m_e}$

$$\underline{\alpha}(\omega) = \frac{Ze^2}{m_e \varepsilon_0}\,\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{i\omega}{\tau}}$$

$$= \frac{3\omega_0^2 V}{\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{i\omega}{\tau}} \quad , \quad Q = \omega_0 \tau$$

$$\underline{\alpha}(\omega) = \frac{3V}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - i\frac{\omega}{\omega_0 Q}}$$

$\underline{\chi} = N\underline{\alpha} \rightarrow \varepsilon_r = 1 + N\alpha$

et pour les milieux dilués

$$n \simeq 1 + \frac{N\alpha}{2}$$

$$= 1 + \frac{N}{2}\,\frac{3V\left(\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right) + \frac{i\omega}{\omega_0 Q}\right)}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0 Q}\right)^2}$$

et $n' = 1 + \frac{N}{2} \frac{3V\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)}{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0 Q}\right)^2}$

$n'' = \frac{3VN}{2} \frac{\frac{\omega}{\omega_0 Q}}{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0 Q}\right)^2}$

On retrouve bien $E = \vec{E}_0 \, e^{-i\omega t} \, e^{ikz}$

$= \vec{E}_0 \, e^{-i\omega t} \, e^{i\frac{\omega}{c}n'z} \, e^{-\frac{\omega}{c}n''z}$

avec $n'' > 0$ absorption (sinon problème).