Modulation et démodulation de fréquence

A. La Modulation de fréquence

I. Modulation de fréquence : rappels

1. Représentation dans le domaine temporel

Soit $u(t)$ un signal sinusoïdal d'amplitude constante et de phase instantanée $\Phi(t)$: $u(t) = A_c.\cos(\Phi(t))$.
Si f_c est la fréquence du signal porteur, alors $\Phi(t)$ s'écrit $\Phi(t) = 2\pi f_c t + \varphi(t)$ où $\varphi(t)$, qui représente l'écart de phase par rapport à la porteuse, contient l'information à transmettre.
On parle de modulation de phase lorsqu'à chaque instant $\varphi(t)$ est proportionnel au signal modulant $m(t)$. Le signal modulé en phase s'exprime alors de la façon suivante :

$$u(t) = A_c \cos(2\pi.f_c t + k_p m(t))$$

On parle de modulation de fréquence lorsque la dérivée de φ par rapport au temps est proportionnelle au signal modulant. Supposons que $f(t) = f_c + k_f m(t)$, le signal modulé en fréquence s'exprime alors de la façon suivante :

$$u(t) = A_c \cos\left(2\pi.f_c t + 2\pi.k_f \int m(\tau)d\tau\right).$$

A un dérivateur ou un intégrateur près les deux types de modulations sont donc identiques.
L'étude sera faite ici pour la modulation de fréquence.
Supposons maintenant que le signal modulant soit de type sinusoïdal $m(t) = A_m.\cos(2\pi f_m t)$, alors le signal modulé est donné par :

$$u(t) = A_c \cos\left[2\pi.f_c t + \beta.\sin(2\pi.f_m.t)\right]$$

où l'on a défini la déviation ou excursion en fréquence $\Delta f = k_f A_m$ (donc $f_{\max} - f_{\min} = 2\Delta f$) et l'indice de modulation $\beta = \dfrac{\Delta f}{f_m}$.

2. Représentation dans le domaine fréquentiel

Pour déterminer le spectre du signal modulé en fréquence $u(t)$ il faut faire un développement en série de Fourier de $\exp[j\beta\sin(\Omega t)]$, à savoir $\exp[j\beta\sin(\Omega t)] = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} J_n(\beta)\exp(jn\Omega t)$ où les $J_n(\beta)$ sont les fonctions de Bessel de première espèce données par $J_n(\beta) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\exp[j\beta(\sin x - nx)]dx$. Ainsi on obtient avec $\Omega = 2\pi f_m$:

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_c J_n(\beta)\cos[2\pi(f_c + nf_m)t].$$

Remarque : pour une modulation à faible indice ($\beta << 1$) le spectre a la même forme que celui d'une modulation d'amplitude.

Le spectre est alors défini par:

$$U(f)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\left[\frac{A_c J_n(\beta)}{2}\delta[f-(f_c+nf_m)]+\frac{A_c J_n(\beta)}{2}\delta[f+(f_c+nf_m)]\right].$$

Les fonctions $J_n(\beta)$ s'annulent régulièrement quand β varie et en particulier $J_0(\beta)=0$ pour $\beta=2{,}4$ ... et la porteuse disparaît dans le spectre.
L'encombrement spectral est plus important que dans le cas de la modulation d'amplitude, et l'on montre que pour β grand 98% de l'énergie est comprise dans une bande $B=2(\beta+1).f_m=2.\Delta f.\left(1+\frac{1}{\beta}\right)=2(\Delta f+f_m)$ appelée bande de Carson.

II. Etude expérimentale

Le signal modulé en fréquence est produit ici par un générateur de fonctions Agilent 33220A pour lequel on peut définir une porteuse de fréquence f_c (touche "Sine", frequency) et un signal modulant de type sinusoïdal, avec une fréquence de modulation f_m et une déviation Δf (touche "Mod", puis "Type" FM, "Source" Interne, Modulation Frequency, Deviation, "Shape" Sine). L'indice de modulation vaut donc : $\beta=\frac{\Delta f}{f_m}$.

1. Etude en basse fréquence

On règle dans un premier temps $f_c=30\text{ kHz}$, $f_m=1\text{ Hz}$ et une déviation $\Delta f=1\text{ kHz}$. Observer grâce à cette modulation "basse-fréquence" le comportement du signal modulé à la fois dans le domaine temporel et dans le domaine fréquentiel. Comparer sommairement avec les signaux obtenus dans le cas de la modulation d'amplitude.

2. Etude en fréquence "audio"

Dans un deuxième temps on prend $f_m=1\text{ kHz}$ avec toujours une déviation de $\Delta f=1\text{ kHz}$.
Observer le spectre du signal modulé grâce à la fonction Math "FFT", faire varier l'indice de modulation par l'intermédiaire de la déviation Δf. Commentez.

Etudier l'influence de l'indice de modulation sur le spectre et en particulier montrer que l'on peut faire disparaître la raie centrale ou bien les raies latérales (ce qui correspond aux zéros des fonctions de Bessel). Déterminer les deux premières annulations et en déduire la valeur correspondante de $\beta=\frac{\Delta f}{f_m}$.

Mesure de la largeur de bande pour une valeur donnée de β : déterminer la puissance du signal dans le canal en sommant la puissance correspondant aux pics du spectre (pics visibles hors du plancher de bruit) ; on introduit un critère de largeur de canal comme étant la bande de fréquence contenant 98% de la puissance. Comparer avec la règle de Carson.

B. La boucle à verrouillage de phase

La nécessité d'une synchronisation entre signaux a été mise en évidence lors du TP sur la démodulation d'amplitude (détection synchrone). Elle est tout aussi présente dans le cas des modulations angulaires.

Le système permettant un asservissement de fréquence, donc une synchronisation s'appelle la boucle à verrouillage de phase (Phase Locked Loop = PLL). Ce système a été introduit en 1932. Il s'agit d'un système bouclé destiné à asservir la phase instantanée du signal de sortie $\phi_s(t)$ sur la phase instantanée du signal d'entrée $\phi_e(t)$. Il permet donc aussi d'asservir la fréquence du signal de sortie $f_s(t)$ sur la fréquence du signal d'entrée $f_e(t)$.

Un tel système est à la base d'innombrables circuits d'électronique : détection synchrone, démodulation d'amplitude, de fréquence (FM et FSK), synthèse de fréquences, télécommunications numériques...